

# 基于等几何法的叶片电解加工 过程仿真方法研究\*

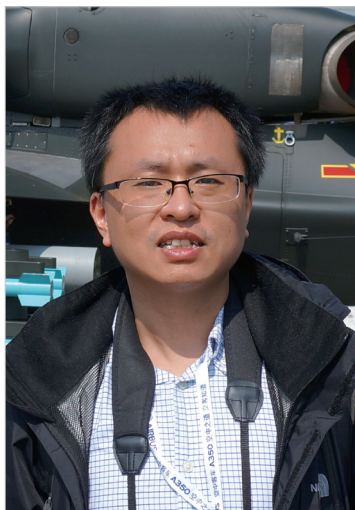
万 能<sup>1</sup>,段永吉<sup>1</sup>,张森堂<sup>2</sup>,杜 珂<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室,西安 710072;  
2. 中国航发沈阳黎明航空发动机(集团)有限责任公司,沈阳 110043)

[摘要] 航空发动机叶片具有复杂的加工边界,其电解加工的过程仿真是加工预测的重要手段。而传统基于有限元法的腐蚀过程仿真需要反复划分网格,且存在边界上计算精度不足的问题。提出利用等几何法原理提升叶片电解加工数值仿真精度的思路,采用 NURBS 基函数替代原有拉格朗日基函数建立加工间隙物理场的求解方程组,解决由于 NURBS 基函数在边界处非插值特性引起的 Dirichlet 边界条件施加误差。将阳极边界的腐蚀位移转化为其控制顶点位移,避免反复划分网格所占用的计算时间,提升过程仿真精度。最后,通过试验证明该方法的有效性。

关键词: 等几何法; 叶片电解加工; NURBS 基函数; Dirichlet 边界条件; 过程仿真

DOI: 10.16080/j.issn1671-833x.2016.22.040



万 能

博士,副教授,主要从事数字化制造、知识工程等方面的科研工作。作为承担者主持国家自然科学基金 1 项,中国博士后科学基金 1 项,陕西省自然科学基金 2 项。近 5 年以第一作者在国内期刊发表学术论文 20 余篇,其中 EI 检索 10 余篇,SCI 检索 6 篇。

\*基金项目: 国家自然科学基金项目(51205320); 西北工业大学研究生创新创业种子基金(Z2016017)。

电解加工以其加工效率高、加工表面质量好、不产生残余应力等优势成为叶片加工的重要特种加工方法。由于电解加工的成形机理复杂,试验成本高,工具电极的设计难度大,需要反复试验修正。因此有必要在计算机中预先进行加工过程仿真。不同工况下,叶片电解加工过程仿真可以减少批量生产前的试制时间和成本。目前,常用的电解加工过程仿真与阴极优化设计的数值计算方法主要基于有限元法(FEM)、有限差分法(FDM)和边界元法(BEM)。Purcar<sup>[1-2]</sup>提出应用边界元法仿真电解加工过程中的阳极工件变化,利用解算网格单元节点沿电流密度方向的移动速率获得阳极的形状变化。Kozak<sup>[3-5]</sup>提出了稳态条件下电解加工的电场数学模型,指出平衡状态下阴阳极间隙与电势差、电导率之间的经验关系。Drake<sup>[6]</sup>采用数值方法仿

真了不同温度、压力和电解液流速等情况下电解过程的稳态和非稳态情况。Buoni<sup>[7-8]</sup>等使用有限元法离散一个任意的空间区域,求解每一个瞬时的电场分布。朱荻院士<sup>[9-11]</sup>团队也提出了在三维环境下基于有限元法进行阴极设计的方法,并将方法应用于压气机叶片加工的阴极设计中,但应用有限元法降低了优化效率和计算精度。但上述研究方法的不足是,因为几何建模与数值分析模型采用不同数学描述方法,两者之间需要相互转换,所以有如下问题:(1)分析模型的准备时间长,转换常出现模型质量不好的现象;(2)阴极优化与电解过程仿真的结果表现为网格结点的位置变化,需要通过拟合网格结点重构复杂型面;(3)传统有限元法采用多项式基函数的网格单元逼近表示边界,从原理上不能精确表达求解区域边界处的约束,不适于叶片电

解加工这类对边界敏感问题的求解。Hughes<sup>[12]</sup> 和 Huerta<sup>[13]</sup> 等提出等几何方法,利用 NURBS 基函数统一几何建模与数值分析的思路。Wang 等<sup>[14]</sup> 借鉴无网格方法中的变换法思想,提出一种基于配点的强施加方法——通过选择一组合适的边界配点拟合控制变量,从而显著提高近似解的收敛率。文献 [15] 针对平流-扩散问题和不可压缩 Navier-Stokes 方程提出了 Dirichlet 边界条件的弱施加方法,该方法为解决等几何分析中边界条件处理提供了重要思路,并将这种方法推广到了墙壁约束的湍流问题<sup>[16]</sup>。因此,本文试图将等几何法应用于叶片电解加工的过程仿真,以期避免过程仿真中反复转化几何与分析模型,同时能够更快地分析收敛和具有更高的分析精度。

### 叶片电解加工腐蚀的数学模型

叶片这类复杂型面工件的电解加工可采用一个形状类似的阴极工具(刀具),工件作为阳极。以阴极工具向阳极工件逐步进给,在阴阳极之间的加工间隙通过高速电解液,带走叶片表面的阳离子,逐渐将叶片工件腐蚀成需要的表面形状,如图 1 所示。

对于叶片电解加工过程而言,是多种物理场耦合作用形成最终叶片外形。在这些影响因素中,电压引起工件的电化学反应并且加工时间决定了叶片表面的材料溶解量。因此,本文在影响电解加工的诸多因素中,选取了电场作为加工仿真的物理对象,构建了相应的仿真模型。

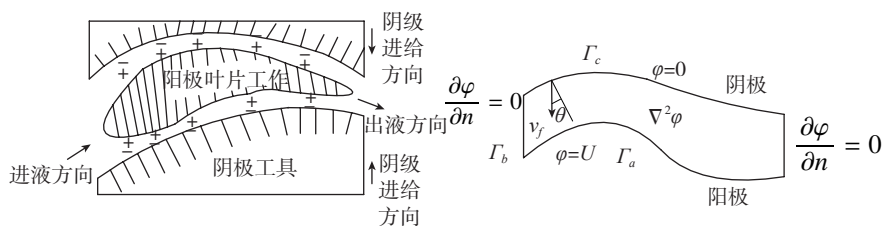


图1 叶片电解加工原理模型

Fig.1 Electrochemical machining principle diagram

一般认为,当电解加工过程处于平衡状态时,加工间隙内的电场属于稳恒电场,电位分布符合 Laplace 方程:

$$\Delta\varphi \doteq \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

工件阳极边界条件  $\Gamma_a$  为:

$$\varphi_{\Gamma_a} = U, \quad (2)$$

阴极边界  $\Gamma_c$  条件为:

$$\varphi_{\Gamma_c} = 0, \quad (3)$$

在边界  $\Gamma_b$  上边界条件为:

$$\frac{\partial\varphi_{\Gamma_b}}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

以上式中,  $\varphi$  为加工间隙中各点电势值,  $U$  为工件阳极表面电势值,  $n$  为工件阳极表面各处的法向坐标。在电解加工中,工件的外形变化取决于表面材料溶解率,而材料溶解率取决于加工间隙间的电势梯度。电势梯度是随着加工过程中材料几何外形的变化而变化的。通过分析加工间隙中的电场分布就可以获得电势梯度,随后阳极工件的腐蚀速度也可以根据法拉第定律计算得到。

根据电场理论,电流密度  $j$  与电场强度  $E$  成正比:

$$j = \kappa E, \quad (5)$$

其中,  $j$  是电流密度,  $E$  是电场强度,  $\kappa$  是电解液电导率。

根据法拉第定律,阳极工件的材料溶解体积可以被定义为:

$$V = \omega It, \quad (6)$$

其中,  $\omega$  是阳极材料的体积电化学当量,  $I$  是电流,  $t$  是加工时间。

另外,电解加工中去除材料的体积可以被定义为:

$$V' = v_a \Delta S t, \quad (7)$$

其中,  $v_a$  是阳极的溶解速率,  $\Delta S$  是阳极表面腐蚀的一个小面积块。

电流则可定义为:

$$I = \Delta S \cdot j. \quad (8)$$

将公式(5)、(6)、(7)代入公式(8),则可获得阳极工件的腐蚀率表达为:

$$v_a = \omega j = \omega \kappa E. \quad (9)$$

工件腐蚀速度  $v_a$  和阴极垂直进给速度  $v$  之间的关系是:

$$v_a = v \cdot \cos \theta. \quad (10)$$

为了显示阳极工件型面的变化过程,需要计算仿真叶片加工间隙的电场分布与腐蚀情况。阳极工件随着阴极工具的进给而被腐蚀,阳极工件型面发生变化进而造成加工间隙变化。取不同时刻的阴极工具进给状态,可以计算出阳极工件不同时刻的腐蚀状态,形成叶片电解加工过程仿真。

### 基于等几何法的电解加工过程仿真特点与思路

#### 1 基函数统一的几何与分析模型

目前,商用 CAD 系统通常采用非均匀有理 B 样条表示叶片这类具有复杂曲面的几何模型。等几何法的基本思想就是采用同一套 NURBS 基函数统一表达几何模型和数值分析模型。对于叶片加工间隙采用样条体表示,它是使用 3 个节点矢量定义的张量积样条。

$$V(\varepsilon, \eta, \zeta) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} N_{ijk}^{pqr}(\varepsilon, \eta, \zeta) \tilde{V}_{ijk}, \quad \tilde{V}_{ijk} \in \mathbb{R}^3$$

其中:

$$N_{ijk}^{pqr}(\varepsilon, \eta, \zeta) = \frac{\omega_{ijk} R_{i,p}(\varepsilon) R_{j,q}(\eta) R_{k,r}(\zeta)}{\sum_{i' \in I} \sum_{j' \in J} \sum_{k' \in K} \omega_{i'j'k'} R_{i',p}(\varepsilon) R_{j',q}(\eta) R_{k',r}(\zeta)},$$

$i \neq i', j \neq j', k \neq k'$

式中:  $\{i, j, k\}$  为节点矢量的索引集,  $\{R_{i,p}, R_{j,q}, R_{k,r}\}$  为各节点矢量对应的单变量 B 样条基函数。  $\omega_{ijk}, \omega_{i'j'k'}$  为权因子。

#### 2 自然划分加工间隙的参数域

NURBS 基函数是由节点矢量和

样条次数定义的,而张量积样条的节点矢量正好张成加工间隙参数域上的规则网格。等几何法采用节点矢量张成的规则网格做自然划分,而无需后续的网格剖分工作。借用经典有限元法中单元和节点的概念,把等几何法中的单元类比为测度不等于零的节点间隙,而节点类比为间隙内非零基函数对应的控制顶点。对于三维张量积样条,单元可表示为  $\Omega_e = [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}] \otimes [\eta_j, \eta_{j+1}] \otimes [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , 其中  $\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}$ ,  $\eta_j < \eta_{j+1}$ ,  $\zeta_k < \zeta_{k+1}$ ; 可以发现单元内的非零基函数共有  $(p+1) \times (q+1) \times (r+1)$  个,其中  $p, q, r$  为基函数的次数。

### 3 NURBS基函数的非插值性

相对于经典有限元的多项式基函数, NURBS 基函数具有很多优点,例如它可以精确表示任意的几何模型,在单元边界处可以获得更高的连续性,但它缺少一个重要的性质,即在节点处的插值性,即  $N_i(\varepsilon_j) \neq \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_j$  为节点处的参数值。虽然可以由“开放节点矢量”定义的单变量样条基函数在曲线首末端点处获得插值性,但是当扩展为张量积样条时并不是总能成立。单变量基函数在首末端点处满足插值条件,但是二维张量积样条基函数除 4 个角点外,在其他各节点处都不具有插值性。因此等几何法不能像传统有限元法一样对叶片电解加工间隙的节点处场变量插值以表示 Dirichlet 边界条件。

### 4 叶片电解加工过程仿真思路

在叶片电解加工的计算机过程仿真中,叶片工件与阴极工具之间的加工间隙一般采用 CAD 系统建立其几何模型。这种几何模型是基于 B-Rep 格式表达的体模型,而以其作为加工间隙求解域,则采用多项式网格划分进行有限元法的数值计算。当求解域几何变化后,需要重新划分网格,计算分析后又需要重新调整加工间隙的 NURBS 曲面形状。究其原因就是几何求解域与物理量逼近空

间采用不同的数学表达形式,因此造成过程仿真中模型重复转换,转换精度丧失等问题。因此本文利用加工间隙的参数化几何模型与分析模型共用 NURBS 基函数实现参数化建模,并自然完成分析单元创建。在完成某一瞬态下的电场强度分析后,根据法拉第定律建立腐蚀体积与电场强度之间关系,可以获得加工  $\Delta t$  时间后加工间隙边界上任意一点处在不同方向上的位移。根据边界上采样点的位移反求各自由曲面边界上的控制顶点位移,即完成了加工间隙重新几何建模,如图 2 所示。

## 基于等几何法的叶片电解加工电场强度分析

### 1 叶片电解加工常微分方程组构建

采用加权余量法推导方程(1)

的等效积分弱形式:

方程(1)两边同乘以权函数  $w$ , 得到:

$$\int_{\Omega} w \Delta \varphi d\Omega = 0,$$

由格林第一公式:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi d\Omega - \oint_{\partial\Omega} w (\nabla \varphi \cdot n) ds = 0$$

式中,  $\partial\Omega = \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c$ , 由于在边界  $\Gamma_b$  上  $\nabla \varphi \cdot n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , 在本质边界  $\Gamma_a$  和  $\Gamma_c$  上权函数  $w=0$ , 则可得到:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi d\Omega = 0. \quad (11)$$

使用 NURBS 基函数作为电场的形状函数,只在空间域上进行离散化。其中为电势物理量的控制变量,即基函数的系数项,电位场值变量的逼近公式可写为:

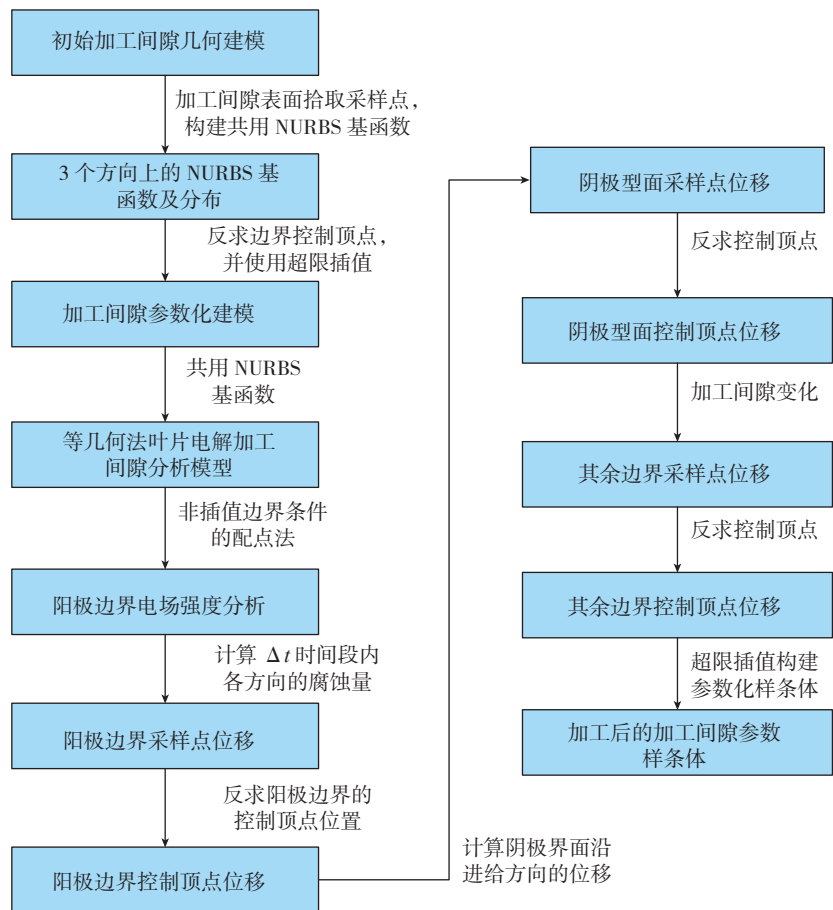


图2 叶片电解加工仿真过程

Fig.2 Simulation process of blade ECM

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^n N_i(\varepsilon_i) \cdot \tilde{\varphi}_i \quad (12)$$

取权函数  $w$  为 NURBS 基函数族, 再代入到公式 (6) 中可以得到方程组形式:

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n \nabla N_j \varphi_j \right) d\Omega = 0 \quad (13)$$

$i=1,2,3,\dots,n$

整理得到电位场值问题的一阶常微分方程组形式:

$$[K_{ij}][\tilde{\varphi}_j] = [F_i] \quad (14)$$

式中,  $[\tilde{\varphi}_j]$  为某时刻加工间隙电势值的控制变量,  $[K_{ij}]$  和  $[F_i]$  分别被称为刚度矩阵和载荷向量。它们的计算公式为:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (15)$$

$$F_i = 0 \quad (16)$$

### 2 叶片电解加工间隙的刚度矩阵和载荷向量的装配

假设叶片电解加工加工区间对应  $U$ 、 $V$ 、 $W$  方向上参数域的节点矢量为  $[0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \dots, 1]$ ,  $[0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_j, \eta_{j+1}, \dots, 1]$  和  $[0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, 1]$ , 基于这些节点矢量所构建的基函数为  $N_i, N_j, N_k$ 。由于 NURBS 基函数的局部支撑性, 即基函数  $N_i, N_j, N_k$  只在区间  $[\varepsilon_i, \varepsilon_{i+p+1}]$ ,  $[\eta_j, \eta_{j+p+1}]$ ,  $[\zeta_k, \zeta_{k+p+1}]$  内有非零值, 其中基函数取工程中常见的 3 次, 即  $p=3$ , 公式 (14) 中的积分运算就不用在整个参数域  $\Omega$  内进行。考虑参数域中所有测度不为零的间隔,

$\Omega_e = [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}] \otimes [\eta_j, \eta_{j+1}] \otimes [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ , 可以把  $\Omega_e$  看成为电解加工间隙划分的等几何分析单元, 因此显然有结论  $\bigcup_{all} \Omega_e = \Omega$ 。定义单元刚度矩阵  $[K^e]$  和单元载荷向量  $[F^e]$ :

$$K^e = \int_{\Omega_e} \nabla N_{ijk}^e(\varepsilon, \eta, \zeta) \cdot N_{ijk}^e(\varepsilon, \eta, \zeta) dV \quad (17)$$

$F^e = 0$

类似于有限元方法, 等几何分析法也可以看成是划分了 NURBS 样条体单元, 如图 3 所示, 但这种单元在加工间隙建模完成时即已完成。同样等几何法也有一个单元刚度矩阵和载荷向量的装配过程, 通过单元刚度矩阵装配得到全局刚度矩阵。

### 3 叶片电解加工间隙几何的参数化

叶片电解加工间隙的边界  $\Gamma_a$  与边界  $\Gamma_c$  为自由曲面, 边界  $\Gamma_b$  为直纹面。为了建立加工间隙的参数化几何模型, 可以对工件表面和阴极工具表面选取采样点, 获得边界  $\Gamma_a$  和  $\Gamma_c$  上的采样点, 另外依据等参条件给定  $\Gamma_b$  上的采样点, 如图 4 所示。

航空发动机叶片的叶盘叶背的曲面比较平展, 曲率变化不急剧。因此本文的采样点选取原则: 在边界曲面  $\Gamma_a$ 、 $\Gamma_c$  和  $\Gamma_b$  的边界线上沿着  $U$  向、 $V$  向和  $W$  向按照等弧长原则选择采样点, 分别取样  $m$ 、 $n$ 、 $l$  个点, 按照 3 个方向分别记为  $P_{ijk}$ 。曲面上采样点集合  $P_{ij0}$ 、 $P_{ijl}$  按照  $U$ 、 $V$  方向等参选取, 集合按照  $V$ 、 $W$  方向等参选取,  $P_{i0k}$ 、 $P_{ink}$  集合按照  $U$ 、 $W$  方向等

参选取。其中,  $i=0, 1, 2, \dots, m$ ;  $j=0, 1, 2, \dots, n$ ;  $k=0, 1, 2, \dots, l$ 。

建立叶片电解加工间隙参数化模型的步骤如下:

(1) 如图 4 所示, 在加工间隙的边界上取采样点集合  $P_{i00}$ ,  $P_{j00}$ ,  $P_{00k}$ , 其中  $i=0, 1, 2, \dots, m$ ;  $j=0, 1, 2, \dots, n$ ;  $k=0, 1, 2, \dots, l$ 。

(2) 采用累加弦长法建立  $P_{0jk}$ ,  $P_{i0k}$  和  $P_{ij0}$  集合对应应在参数域中对应参数值  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_j$  和  $\bar{w}_k$ , 其中  $i=0, 1, 2, \dots, m$ ;  $j=0, 1, 2, \dots, n$ ;  $k=0, 1, 2, \dots, l$ 。将  $U$ 、 $V$ 、 $W$  3 个方向的节点矢量统一记为  $\bar{r}_s$ , 其中  $\bar{r}$  可以代表  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_j$  和  $\bar{w}_k$  其中任何一种,  $s$  是对应下标  $i, j, k$  其中一种。

(3) 构建 3 个方向的节点矢量。即令节点矢量满足:  $r_0 = r_1 = \dots = r_p = 0$ ,  $r_m = r_{m+1} = \dots = r_{m+p} = 1$ ,  $r_{s+p} = \frac{1}{p} \sum_{ijk=s}^{s+p-1} \bar{r}_s, s=1, \dots, m-1$ 。  $p$  是曲面的次数, 本文取工程中最常见的次数为  $p=3$ 。

(4) 节点矢量记为  $r_{s'}$ , 其中  $s'=0, 1, 2, \dots, s+p+1$ 。以  $r_{s'}$  作为节点矢量分别构建在  $U$ 、 $V$ 、 $W$  方向上的 NURBS 基函数  $N_i$ 、 $N_j$  和  $N_k$ 。

(5) 分别对  $\Gamma_a$ 、 $\Gamma_{bF}$ 、 $\Gamma_{bB}$ 、 $\Gamma_{bL}$ 、 $\Gamma_{bR}$ 、 $\Gamma_c$  6 个边界面反求其控制顶点集合  $V_{ij0}$ ,  $V_{ijl}$ ,  $V_{i0k}$ ,  $V_{ink}$ ,  $V_{0jk}$ ,  $V_{mjk}$ 。若记加工间隙边界  $\Gamma$  上的控制顶点为  $\text{Ctrl}(\Gamma)$ , 则可得到:

$$\text{Ctrl}(\Gamma_a) = V_{ij0} = [N_i(\bar{u}_i)N_j(\bar{v}_j)]^{-1}P_{ij0}$$

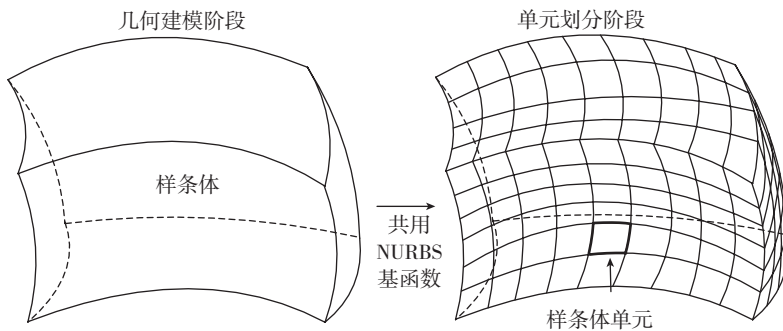


图3 NURBS样条体单元  
Fig.3 NURBS volume element

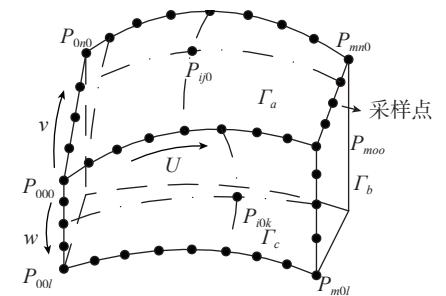


图4 叶片电解加工间隙的三维模型及采样点  
Fig.4 sampling points on the model of machining gap

Ctrl( $\Gamma_b$ ) =  $V_{ijl} = [N_i(\bar{u}_i)N_j(\bar{v}_j)]^{-1}P_{ijl}$ ,  
 Ctrl( $\Gamma_{bF}$ ) =  $V_{i0k} = [N_i(\bar{u}_i)N_k(\bar{w}_k)]^{-1}P_{i0k}$ ,  
 Ctrl( $\Gamma_{bB}$ ) =  $V_{ink} = [N_i(\bar{u}_i)N_k(\bar{w}_k)]^{-1}P_{ink}$ ,  
 Ctrl( $\Gamma_{bL}$ ) =  $V_{0jk} = [N_j(\bar{v}_j)N_k(\bar{w}_k)]^{-1}P_{0jk}$ ,  
 Ctrl( $\Gamma_{bR}$ ) =  $V_{mjk} = [N_j(\bar{v}_j)N_k(\bar{w}_k)]^{-1}P_{mjk}$ ,  
 其中,  $i = 0, 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots, l$ 。

(6) 验证采样点拟合曲面误差。由于采用的是准均匀节点矢量, 因此对于 6 个边界曲面, 每张曲面的角点处采样点  $P_{000}, P_{m00}, P_{00l}, P_{m0l}, P_{0n0}, P_{mn0}, P_{0nl}, P_{mnl}$  与控制顶点  $V_{000}, V_{m00}, V_{00l}, V_{m0l}, V_{0n0}, V_{mn0}, V_{0nl}, V_{mnl}$  重合, 因此可以将由采样点拟合的边界曲面  $\Gamma^f$  和 CAD 建模的理论边界曲面  $\Gamma^r$  的 4 个角点重合。由边界  $\Gamma^r$  上采样点  $P_{ijk}$  做边界  $\Gamma^f$  的垂线, 交于边界  $\Gamma^f$  上的点记为  $P'_{ijk}$ 。记  $L_{ijk} = \|P_{ijk} - P'_{ijk}\|$ ,

$$\varepsilon_{i0} = \frac{1}{m \times n} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n L_{ij0}, \varepsilon_{ijl} = \frac{1}{m \times n} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n L_{ijl},$$

$$\varepsilon_{0k} = \frac{1}{n \times l} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l L_{0jk}, \varepsilon_{mjk} = \frac{1}{n \times l} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l L_{mjk},$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{m \times l} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^l L_{ik}, \varepsilon_{ink} = \frac{1}{m \times l} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^l L_{ink}。$$

当满足  $\varepsilon_{i0} \leq \varepsilon, \varepsilon_{ijl} \leq \varepsilon, \varepsilon_{0k} \leq \varepsilon, \varepsilon_{mjk} \leq \varepsilon, \varepsilon_{ik} \leq \varepsilon, \varepsilon_{ink} \leq \varepsilon$  时, 则认为控制顶点所构建加工间隙边界与加工间隙模型一致。

(7) 通过对边界控制顶点  $V_{ij0}, V_{ijl}, V_{i0k}, V_{ink}, V_{0jk}, V_{mjk}$  超限插值可以得到整个加工间隙体的控制顶点:

$$U = \sum_{i=1}^{m-1} (1 - \varepsilon_i) \cdot V_{0jk}(0, \eta_j, \zeta_k) + \varepsilon_i \cdot V_{mjk}(1, \eta_j, \zeta_k),$$

$$V = \sum_{j=1}^{n-1} (1 - \eta_j) \cdot V_{i0k}(\varepsilon_i, 0, \zeta_k) + \eta_j \cdot V_{ink}(\varepsilon_i, 1, \zeta_k),$$

$$W = \sum_{k=1}^{l-1} (1 - \zeta_k) \cdot V_{ij0}(\varepsilon_i, \eta_j, 0) + \zeta_k \cdot V_{ijl}(\varepsilon_i, \eta_j, 1),$$

$$UW = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{l-1} (1 - \varepsilon_i)(1 - \zeta_k) \cdot$$

$$V_{0j0}(0, \eta_j, 0) + (1 - \varepsilon_i)\zeta_k \cdot V_{0jl}(0, \eta_j, 1) + \varepsilon_i(1 - \zeta_k) \cdot V_{mjo}(1, \eta_j, 0) + \varepsilon_i\zeta_k \cdot V_{mjl}(1, \eta_j, 1),$$

$$UV = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_i)(1 - \eta_j) \cdot V_{00k}(0, 0, \zeta_k) + (1 - \varepsilon_i)\eta_j \cdot V_{0nk}(0, 1, \zeta_k) + \varepsilon_i(1 - \eta_j) \cdot V_{m0k}(1, 0, \zeta_k) + \varepsilon_i\eta_j \cdot V_{mnk}(1, 1, \zeta_k),$$

$$VW = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} (1 - \eta_j)(1 - \zeta_k) \cdot V_{i00}(\varepsilon_i, 0, 0) + (1 - \eta_j)\zeta_k \cdot V_{i0l}(\varepsilon_i, 0, 1) + \eta_j(1 - \zeta_k) \cdot V_{i00}(\varepsilon_i, 1, 0) + \eta_j\zeta_k \cdot V_{i0l}(\varepsilon_i, 1, 1),$$

$$UVW = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} (1 - \varepsilon_i)(1 - \eta_j)(1 - \zeta_k) \cdot V_{000}(0, 0, 0) + (1 - \varepsilon_i)(1 - \eta_j)\zeta_k \cdot V_{00l}(0, 0, 1) + (1 - \varepsilon_i)\eta_j(1 - \zeta_k) \cdot V_{0n0}(0, 1, 0) + \varepsilon_i(1 - \eta_j)(1 - \zeta_k) \cdot V_{m00}(1, 0, 0) + (1 - \varepsilon_i)\eta_j\zeta_k \cdot V_{0nl}(0, 1, 1) + \varepsilon_i(1 - \eta_j)\zeta_k \cdot V_{m0l}(1, 0, 1) + \varepsilon_i\eta_j(1 - \zeta_k) \cdot V_{mnl}(1, 1, 0) + \varepsilon_i\eta_j\zeta_k \cdot V_{mnl}(1, 1, 1)。$$

(8) 最终得到叶片电解加工参数化间隙体的控制顶点为:  $V_{ijk} = U + V + W - UW - UV - VW + UVW$ , 其中,  $i=0, 1, 2, \dots, m, j=0, 1, 2, \dots, n, k=0, 1, 2, \dots, l, \varepsilon_i, \eta_j, \zeta_k \in [0, 1]$ 。

因此, 叶片电解加工间隙的几何模型可表示为

$$V_{vol} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l N_i(\bar{u}_i)N_j(\bar{v}_j)N_k(\bar{w}_k)V_{ijk}。$$

文章后续将

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l N_i(\bar{u}_i)N_j(\bar{v}_j)N_k(\bar{w}_k)$$

简写为  $\sum_{ijk=0}^n N_{ijk}$ 。

#### 4 Dirichlet边界约束处理

由于采用 NURBS 基函数表达叶片电解加工间隙的电场分布, 因此不能像传统分段多项式有限单元一样插值 Dirichlet 边界上采样点的电场值。因此, 采用强施加方法对公式 (14) 施加 Dirichlet 边界条件。假设弱解  $\varphi \in s$  可以表示为两部分之和:  $u=e+g$ , 其中  $g \in s, e \in V$ , 代入到公式 (11) 中得到:

$$a(e, v) = l(v) - a(g, v)。 \quad (18)$$

假设叶片电解加工间隙的所有 NURBS 基函数的集合为  $N = \{N_i\}_{i=1}^n$ , 其中  $n$  为所有基函数的数量。假设边界上非零值的基函数集合为  $B = \{N_s^B\}_{s=1}^{n_B}$ ,  $n_B$  为  $B$  集合中的函数个数。边界上只有零值的基函数集合  $I = \{N_s^I\}_{s=1}^{n_I}$ ,  $n_I$  为  $I$  集合中的函数个数。则有:

$$\begin{cases} g = \sum_{ijk=0}^{n_B} \tilde{\varphi}_{ijk}^B N_{ijk}^B \\ e = \sum_{ijk=0}^{n_I} \tilde{\varphi}_{ijk}^I N_{ijk}^I \end{cases},$$

式中:  $\tilde{\varphi}_{ijk}^B$  是集合  $B$  中对应基函数的控制变量,  $\tilde{\varphi}_{ijk}^I$  是集合  $I$  中对应基函数的控制变量。考虑到 NURBS 基函数的局部支撑性质, 只有少量的基函数在边界上有非零值。不失一般性, 假设集合  $\{N_i, N_j, N_k\}_{i,j,k=0}^{n_B} \in I$ ,  $\{\tilde{N}_i, \tilde{N}_j, \tilde{N}_k\}_{i,j,k=ne+1}^{np} \in B$ 。由于加工间隙中稳态电场的求解方程组公式 (14) 没有考虑强制边界条件, 刚度矩阵  $[k_{ij}]$  是奇异的。因此, 在边界  $\Gamma_a$  和  $\Gamma_c$  上引入采样点  $\chi_{mm0}, \chi_{mm1}$  处的电场电势值  $\{\varphi_{ij0} = U, \varphi_{ijl} = 0\}$ , 对应参数域坐标为  $\{\Xi \equiv \varepsilon_m, \eta_n, \zeta\}_{m,n=ne+1}^{np}, \zeta=0,1$ 。则弱解中的强制边界条件项可近似表示为:

$$\varphi(\chi_{mm0}) = \sum_{i=ne+1}^{np} \sum_{j=ne+1}^{np} \tilde{N}_i(\varepsilon_m)\tilde{N}_j(\eta_n)\tilde{\varphi}_{ij0}^B$$

$$\varphi(\chi_{mm1}) = \sum_{i=ne+1}^{np} \sum_{j=ne+1}^{np} \tilde{N}_i(\varepsilon_m)\tilde{N}_j(\eta_n)\tilde{\varphi}_{ijl}^B,$$

对其中的基函数进行排序后, 可以求出控制变量  $\tilde{\varphi}_{ij0}^B$  和  $\tilde{\varphi}_{ijl}^B$ 。并将  $\tilde{\varphi}_{ij0}^B$  和  $\tilde{\varphi}_{ijl}^B$  带入到公式 (14) 消元后即可求得未知内部控制变量  $\tilde{\varphi}_{ijk}^I$ 。令  $\tilde{\varphi}_{ijk} = \tilde{\varphi}_{ij0}^I \cup \tilde{\varphi}_{ij0}^B \cup \tilde{\varphi}_{ijl}^B$ , 最终利用  $\varphi = \sum_{ijk=0}^n N_{ijk}\tilde{\varphi}_{ijk}$  逼近表达了电解加工间隙的电势分布。

#### 叶片电解加工过程的仿真

通过采用 NURBS 基函数作

为逼近电势空间的形状函数, 求得了阳极表面任一点处的电势值。由于电场强度是电势的梯度, 即可得  $E = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial x}i + \frac{\partial \phi}{\partial y}j + \frac{\partial \phi}{\partial z}k$ 。记加工间隙边界曲面上任意一点为  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ , 加工  $\Delta t$  时间后该点的位移后的坐标为:  $P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ 。

对于叶片阳极表面  $\Gamma_a$  而言, 根据公式(9) 计算得到腐蚀速率  $v_a = \omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n}$ , 在腐蚀时间  $\Delta t$  时间后, 可以得到阳极工件表面上任一点在  $U, V, W$  方向上的位移分量为  $\omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \Delta t$ ,  $\omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \Delta t$  和  $\omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \Delta t$ 。阳极表面上对应该点腐蚀产生位移后的坐标记为:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \Delta t, \\ y_{i+1} &= y_i + \omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \Delta t, \\ z_{i+1} &= z_i + \omega\kappa \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \Delta t. \end{aligned} \quad (19)$$

对于阴极工具表面  $\Gamma_c$  而言, 它是沿着  $Z$  轴的负方向以速度  $v$  进给, 而阴极工具由于不会发生电化学反应, 因此其表面不会发生变化, 是一种刚体运动。其上任一点的位移是:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i, y_{i+1} = y_i, \\ z_{i+1} &= z_i + v \cdot \Delta t. \end{aligned} \quad (20)$$

如图5所示, 对于加工间隙的边界曲面  $\Gamma_b$  而言, 其上任一点随着加工间隙的变化而产生位移。在  $t$  时刻, 由阴极曲面边界曲线上采样点  $P_{0j_0}, P_{mj_0}, P_{i0_0}, P_{i0}$  (其集合记为  $P_c$ , 其每一点的  $Z$  坐标记为  $Z_{p_c}^t$ ) 沿其进给方向做直线交于阳极曲面边界曲线上, 交点记为  $P'_{0j_0}, P'_{mj_0}, P'_{i0_0}, P'_{i0}$  (其集合记为  $P'_c$ ), 求出间隙值为  $L_c^t = \|P_c - P'_c\|$ 。腐蚀  $\Delta t$  时间后, 间隙值变为  $L_c^{t+\Delta t}$ ,  $P_c$  中每一点的  $Z$  坐标

记为  $Z_{p_c}^{t+\Delta t}$ 。则在边界  $\Gamma_b$  上任一点的位移是:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i, y_{i+1} = y_i, \\ z_{i+\Delta t} &= \frac{L_c^t}{L_c^{t+\Delta t}}(z_i - Z_{p_c}^t) + Z_{p_c}^{t+\Delta t}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于在时刻  $t=0$  时, 边界  $\Gamma_a, \Gamma_b$  和  $\Gamma_c$  上采样点记为  $P_{ijk}$ , 根据公式(19)、(20) 和 (21) 计算可得  $\Delta t$  时间后的对应采样点为  $P_{ijk}^{t+\Delta t}$ 。将采样点  $P_{ijk}^{t+\Delta t}$  执行“建立叶片电解加工间隙参数化模型”第(5)步反求出各边界面上的控制顶点, 执行第(7)步超限插值获得加工  $\Delta t$  后加工间隙样条体的控制顶点  $V_{ijk}^{t+\Delta t}$ , 相应的加工间隙参数化几何体为

$$V_{vol}^{t+\Delta t} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l N_i(\bar{u}_i) N_j(\bar{v}_j) N_k(\bar{w}_k) V_{ijk}^{t+\Delta t}.$$

利用统一的 NURBS 基函数统一表达几何模型与数值计算模型, 将阳极工件表面因为腐蚀而造成的型面几何变化直接转化为型面控制顶点的变化, 可以避免叶片电解加工过程仿真中两种模型的相互转换。消除

了由于传统有限元法方法因为要进行模型转化而影响计算效率的因素。

### 试验验证

根据上述分析, 我们设置电解加工仿真的电势差为 15V, 阴极进给速度为 0.5mm/min, 电解液成分为  $\text{NaNO}_3$ , 浓度 10%, 初始温度 25~30℃, 流速为 15m/s, 工件材料为 2Cr13 钢。

利用三维设计软件 NX 建立叶片电解加工初始状态下阳极工件和阴极工具加工型面的几何模型, 如图 6 所示。

在加工间隙的每个面上, 分别在两个方向上按照等弧长原则选择采样点, 并通过采样点反求每个面的控制顶点。利用“超限插值”方法求解出加工间隙体内的控制顶点, 得到加工间隙体的控制顶点网格, 从而参数化地表达加工间隙体, 如图 7 所示。

利用边界配点法施加电解加工间隙边界处的电势约束条件, 通过计算得到加工间隙内的电势分布, 电场

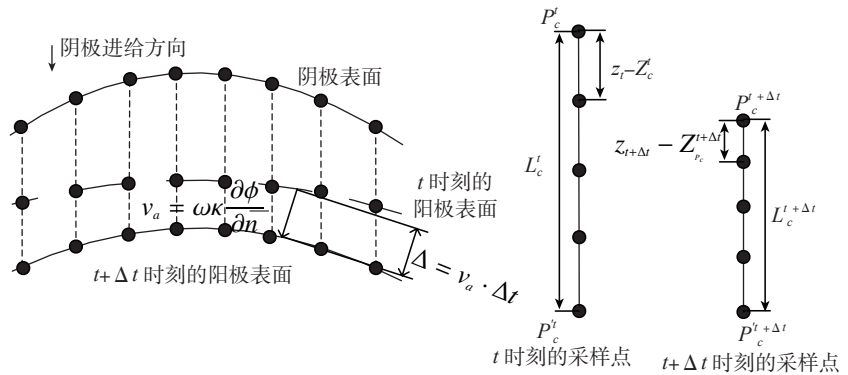


图5 采样点的腐蚀位移模型  
Fig.5 Sampling point corrosion displacement model

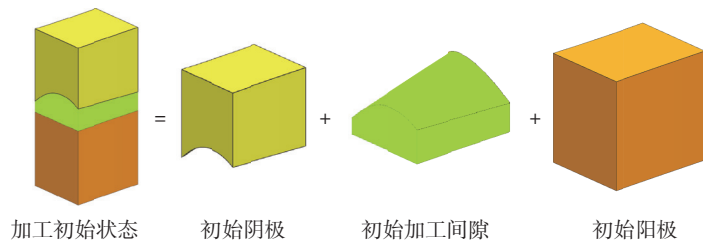


图6 加工间隙几何模型  
Fig.6 Geometry model of machining gap

矢量分布如图 8 所示。

对经典有限元和等几何分析的收敛速度进行比较,将经典有限元和等几何分析法分别采用三次函数构建。虽然样条函数也可理解为定义在参数域内的分段(有理)多项式,但它通常可以获得比经典有限元更高的单元边界连续性。经典有限元在单元边界处通常是  $C^0$  连续,而样条函数可以获得  $C^{p-r}$  ( $r$  为节点重复次数)连续。因此,如图 9 所示,等几何分析方法可以获得更高的分析精度。计算数据表明,在相同的网格

自由度情况下, FEM 和等几何法都能达到收敛,但是相对来说等几何法的收敛速度明显要快于 FEM。

利用求解出的电场矢量分布,根据公式(19)、(20)和(21)计算可得  $\Delta t$  时间后的对应采样点的偏移,通过采样点新的位置重新拟合阳极工件型面,并带入公式反求每个面的控制顶点,超限插值建立加工间隙体的控制顶点网格,并再次进行分析计算。这样随着工具阴极不断的进给,工件阳极被不断的腐蚀加工,我们选取仿真过程中  $T=0\text{min}$ 、 $T=5\text{min}$ 、 $T=10\text{min}$ 、 $T=15\text{min}$  4 个时间点,可以清楚地看出阳极工件随着时间的变

化慢慢成形,如图 10 所示。

### 结束语

电解加工是航空发动机叶片加工的一种重要的特种加工技术,其加工过程仿真对于预测加工结果、提升加工质量等都有帮助作用。本文针对航空发动机叶片这类具有复杂型面产品的电解加工过程仿真,提出加工间隙几何建模和电场分布数值分析共用相同的 NURBS 基函数这一思路,几何建模结束就自然划分了用于电场矢量分析的单元网格,电场矢量分析结果直接转化为几何模型的控制顶点位移,避免了传统有限元方法

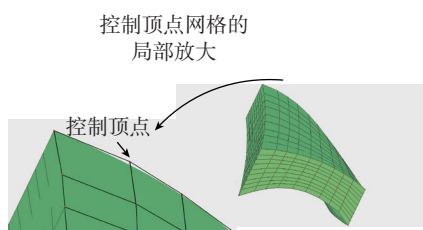
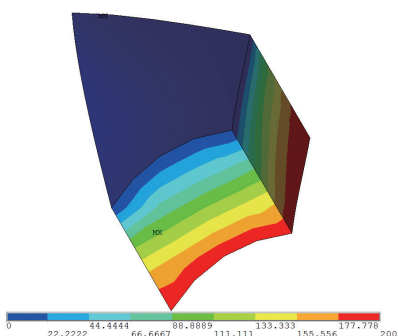
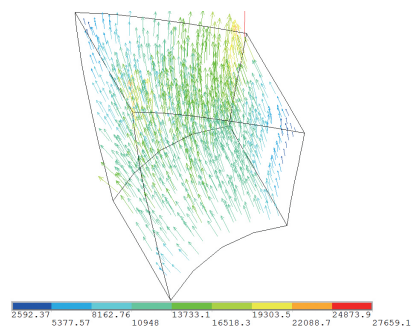


图7 加工间隙体的控制顶点  
Fig.7 Control points of machining gap parametric model



(a)加工间隙电势分布



(b)加工间隙电场分布

图8 加工间隙内的电势分布与电场矢量分布

Fig.8 Electric potential distribution and electric field distribution

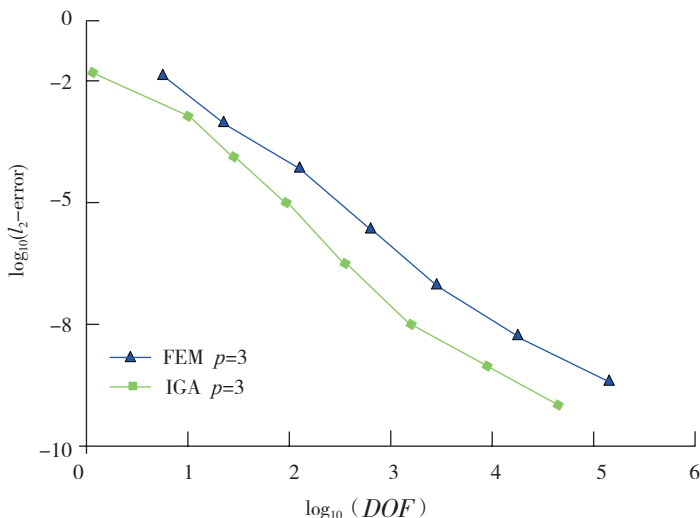


图9 有限元和等几何法的收敛速度比较

Fig.9 Convergence speed comparison between finite element method and Isogeometric analysis

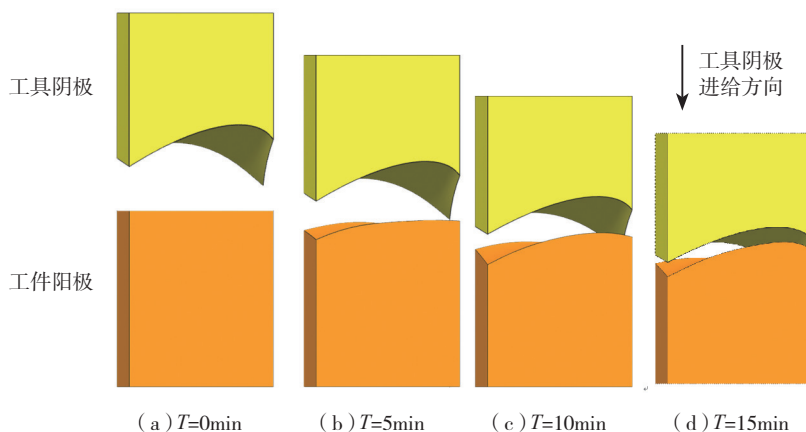


图10 加工间隙电解过程仿真

Fig.10 Process simulation of ECM

的网格剖分与几何模型重构,节约了这两部分所消耗的时间。另外,对于相同粒度的网格单元,等几何法较有限元法有更快的收敛速度,单次分析所用时间短于使用有限元法。因此,基于等几何法进行航空发动机叶片电解加工的过程仿真较传统采用有限元法具有更好的响应速度和更高的仿真精度。

### 参考文献

- [1] PURCAR M, BORTELS L, BOSSCHE B V D, et al. 3D electrochemical machining computer simulations[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2004,149(1-3):472-478.
- [2] PURCAR M, DOROCHENKO A, BORTELS L, et al. Advanced CAD integrated approach for 3D electrochemical machining simulations[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2008, 203(1-3):58-71.
- [3] KOZAK J. Mathematical models for computer simulation of electrochemical machining processes[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 1998,76(1-3):170-175.
- [4] KOZAK J. Computer simulation system for electrochemical shaping[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2001,109(3):354-359.
- [5] DOMANOWSKI P, KOZAK J. Inverse problems of shaping by electrochemical generating machining[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2001,109(3):347-353.
- [6] DRAKE J, RADKE C, NEWMAN J. Transient linear stability of a Simons-process gas-liquid electrochemical flow reactor using numerical simulations[J]. *Chemical Engineering Science*, 2001, 56(20):5815-5834.
- [7] BUONI M, Petzold L. An efficient scalable numerical algorithm for the simulation of electrochemical systems on irregular domains[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 225(2):2320-2332.
- [8] BUONI M, PETZOLD L. An algorithm for simulation of electrochemical systems with surface-bulk coupling strategies[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(2):379-398.
- [9] SUN C H, ZHU D, LI Z Y, et al. Application of FEM to tool design for electrochemical machining freeform surface[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, 43(2):168-172.
- [10] 李志永,朱荻,孙春华,等. 发动机叶片电解加工阴极设计有限元数值解法研究[J]. *中国机械工程*, 2004,15(13):1151-1154.
- LI Zhiyong, ZHU Di, SUN Chunhua, et al. Study on finite-element arithmetic in electrochemical machining for turbine blades [J]. *China Mechanical Engineering*, 2004,15(13):1151-1154.
- [11] WANG M H, ZHU D. Simulation of fabrication for gas turbine blade trubulated cooling hole in ECM based on FEM[J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2009,209:1747-1751.
- [12] HUGHES T, COTTRELL J, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005,194(39-41):4135-4195.
- [13] FERNANDEZ-MENDEZ S, HUERTA A. Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004,193(12-14): 1257-1275.
- [14] WANG D D, XUAN J C. An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(37-40): 2425-2436.
- [15] BAZILEVS Y, HUGHES T. Weak imposition of Dirichlet boundary conditions in fluid mechanics[J]. *Computers & Fluids*, 2007, 36(1): 12-26.
- [16] BAZILEVS Y, MICHLER C, CALO V M, et al. Weak Dirichlet boundary conditions for wall-bounded turbulent flows[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(49-52): 4853-4862.

## Research on Blade Electrochemical Machining Process Simulation Based on Isogeometric Method

WAN Neng<sup>1</sup>, DUAN Yongji<sup>1</sup>, ZHANG Sentang<sup>2</sup>, DU Ke<sup>1</sup>

(1. Key Lab of Contemporary Design and Integrated Manufacturing Technology of Ministry of Education, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. AECC Shenyang Liming Aeroengine (Group) Corporation Ltd., Shenyang 110043, China)

**[ABSTRACT]** Electrochemical machining process simulation for the blade of aviation engine with complex boundary plays an important role in the machining prediction. Traditional process simulation relies on finite element method which needs to solve the remeshing problem and computational accuracy problem. In this paper, we present an approach for improving the simulation precision based on isogeometric method, which employs NURBS basis function to replace the original Lagrange basis function in the finite element method and solves the Dirichlet boundary condition's inflection problem. In the process of simulation, the corrosion displacement is translated into the displacement of the control point which avoids the computation time of remeshing and promotes the simulation precision, as demonstrated in the case of this paper.

**Keywords:** Isogeometric method; Electrochemical machining; NURBS basis function; Dirichlet boundary condition; Process simulation

(责编 玲犀)